Integrationstheorie I

24.06.19

Ziel (Heute + 01.07.):

·) Gegeben $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, definiere $\int_D f$.

·) Rechenregeln, insb. Transformationsformel (∇)

·) Beispiele.

§ 1 Wdh: Integration von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

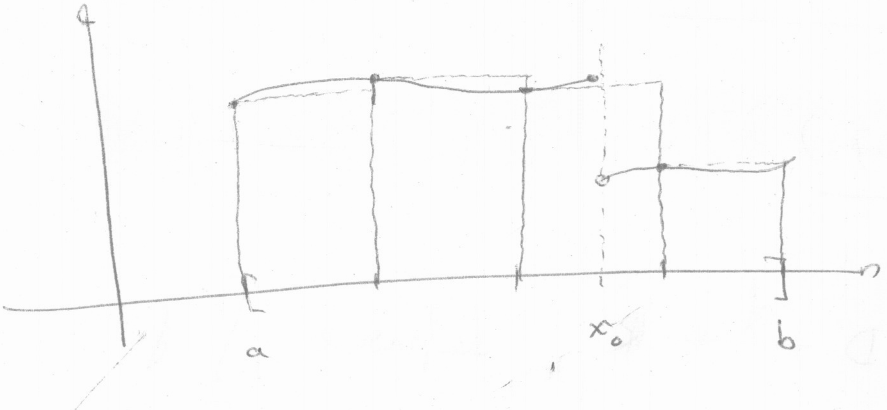
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~höchstens~~, $N \in \mathbb{N}$.

Setze $\sigma(f, N) := \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{N}\right) \cdot \frac{(b-a)}{N}$.

Thm Falls f stetig ist (allgemeiner: f beschränkt + stetig außerhalb endl vieler Punkte),

so existiert $\lim_{N\to\infty} \sigma(f, N)$.

Def $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{N\to\infty} \sigma(f, N)$. ($f$ beschränkt + stetig weg von endl viele Pkten)



Bsp.: $N = 4$

f nur in x_0 nicht stetig.

$\sigma(f,N)$ ist Summe der Flächen der Rechtecke.

Offensichtliche Regeln:

1) $$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

$\left(f, g : [a,b] \to \mathbb{R} \right.$
$\left. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right)$

2) Für $a < b < c$, $f : [a,c] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Zwei Interpretationen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \text{Fläche zwischen Graph von } f \text{ \& } x\text{-Achse} \\ \text{Länge von } [a,b], \text{ gewichtet mit } f. \end{cases}$$

Thm (Hauptsatz d. Differenzial- und Integralrechnung)

Sei F eine Stammfkt für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (d.h. $F' = f$). Dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b} := F(b) - F(a).$$

Bsp 1) $\int_a^b f(x)\,dx$ für $f \in \{\text{Polynom}, \sin, \cos, \exp, \dots, x \mapsto x^\alpha\}$

nach Hauptsatz ok

2) $$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \Big[-\ln(x+1) + \ln(x)\Big]_{x=1}^{2}$$

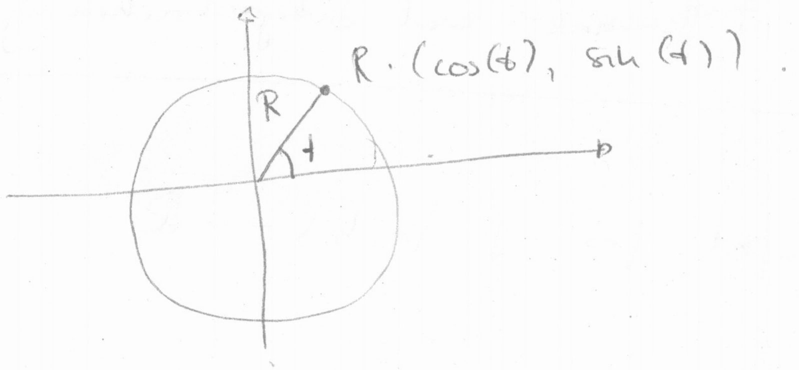
$$= -\ln(3) + 2\ln(2)$$

Denn $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, also $\ln$ Stammfunktion von $\frac{1}{x}$.

3) $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = R \cdot (\cos t, \sin t)$

$R > 0$,

Parametrisierung d. Kreisbogens



~~Wegen~~ Länge $= \int$ Geschwindigkeit d Zeit gilt.

Umfang d. Kreis mit Radius R

$$= \int_0^{2\pi} \| \varphi'(t) \| \, dt = \int_0^{2\pi} \left\| R \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R \cdot \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{=1} \, dt = \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi \cdot R.$$

Aus dem Hauptsatz ergeben sich weitere Regeln:

Satz ~~Prop~~ 1). (Partielle Integration) Seien F, G Stammfkt für $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b (F \cdot g)(x) \, dx = F \cdot G \Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b (f \cdot G)(x) \, dx.$$

2) (Substitution) Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ gegeben,

$\varphi:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ differenzierbar mit

~~oder $\varphi(c)=b$, $\varphi(d)=a$.~~

$\varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b.$ Dann

~~oder $\varphi(c)=b$, $\varphi(d)=a$.~~

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d \varphi'(x)\cdot f(\varphi(x))\,dx.$$

0, da $\sin(0)=\sin(\pi)=0$

Bsp 1)

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx \overset{\text{partielle Integrat.}}{=} \cancel{-\cos(x)\cdot\sin(x)\Big|_{x=0}^{\pi}} + \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx.$$

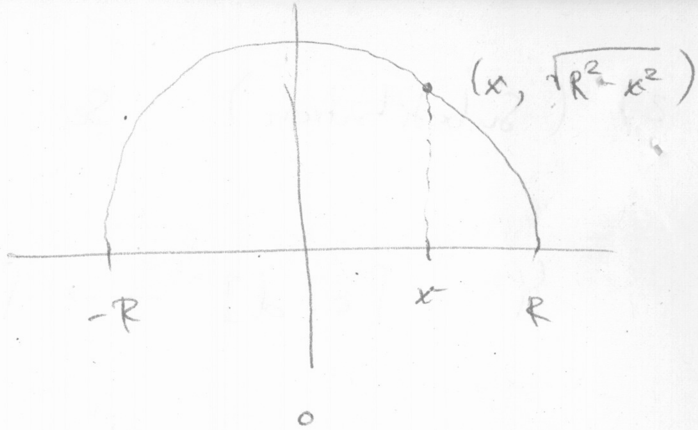
Wegen $\cos^2+\sin^2=1$ erhalten wir

$$2\cdot\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi 1\,dx = \pi$$

$$\Longrightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2) Fläche d. Kreises

von Radius R.



$$\text{Fläche} = 2 \cdot \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \; dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Substitution mit} \\ \varphi : [-1,1] \to [-R,R] \\ \quad x \mapsto R \cdot x \end{array} \right)$$

$$= 2 \cdot \int_{-1}^{1} \underbrace{R}_{=\varphi'} \cdot \sqrt{R^2 - R^2 x^2} \; dx = 2R^2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \; dx$$

$$\left(\text{Substitution mit} \quad \varphi : [0,\pi] \to [-1,1] , \; x \mapsto \cos(x) \right)$$

$$= 2R^2 \int_{0}^{\pi} \underbrace{+\sin(x)}_{=-\varphi'} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2(x)}}_{=\sin^2} \; dx$$

$$= 2R^2 \int_{0}^{\pi} \sin^2(x) \; dx = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

§ 2 Integration auf $\mathbb{R}^n$

Sei $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$

stetig (geht auch etwas allgemeiner).

Def $\int_Q f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$ als Mehrfachintegral

$$:= \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1}_{\text{Funktion in } x_2, \dots, x_n} dx_2 \dots dx_n .$$

Thm (Fubini) Dieses Integral hängt nicht von der Reihenfolge der Koordinaten ab.

Bemerkung 1) Es gibt auch eine Definition als $\lim_{N \to \infty} \sigma(f, N)$. Diese führt zum selben Integralbegriff.

2) Es gibt wieder zwei Interpretationen:

$$\int_Q f = \begin{cases} \text{"Volumen" (mit Vorzeichen) zwischen } \mathbb{R}^n \times \{0\} \text{ und dem Graphen von } f \\ \text{Volumen von } Q \text{, gewichtet mit } f. \end{cases}$$

Beispiel für zweite Interpretation:

Def Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ~~ist~~ sei $\mathbb{1}_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in X \\ 0 & x \notin X. \end{cases}$$

Indikatorfunktion von X.

Für vernünftiges X $\subseteq Q$ ist dann

$$\int_Q \mathbb{1}_X (x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Vol}(X).$$

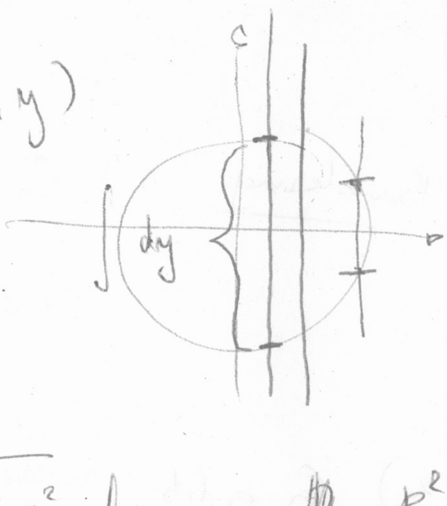
Bsp 1)

$$\int_0^{2019} \mathbb{1}_{[1,3]}(x)\, dx = 2$$

$$= \text{Länge}([1,3]).$$

2)

$$\int_{[-R,R]\times[-R,R]} \mathbb{1}_{\underbrace{\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}}_{\text{Kreisscheibe von Radius } R}} (x,y)\, d(x,y)$$



$$= \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} \mathbb{1} \dots\, dy\, dx = \int_{-R}^{R} 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \pi R^2.$$

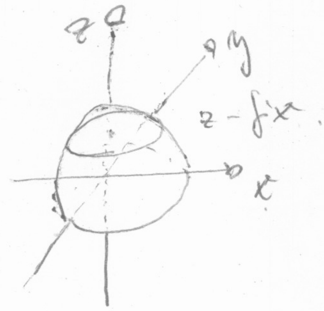
siehe den

3.) Volumen der Kugel von Radius R

$$K_R := \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{Vol}(K_R) =$$

$$\int_{[R,R]^{\times 3}} \mathbb{1}_{K_R}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$



$$= \int_{-R}^{R} \underbrace{\int_{[-R,R]^2} \mathbb{1}_{K_R}(x,y,z)\, d(x,y)}_{\text{Fläche von Kreis mit Radius } \sqrt{R^2-z^2} \;=\; \pi(R^2-z^2).} dz$$

$$= \int_{-R}^{R} \pi(R^2-z^2)\, dz = \pi \cdot \Big[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3 \Big]_{z=-R}^{R}$$

$$= \pi \left(R^3 - \tfrac{1}{3}R^3 + R^3 - \tfrac{1}{3}R^3 \right)$$

$$= \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

Nur über Quader zu integrieren ist sehr einschränkend.

offen oder Abschluss von offener Menge.

<u>Def</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$.

1) f ist <u>integrierbar</u>, falls

Betrag!

$$\lim_{N \to \infty} \int_{[-N,N]^n} \underbrace{\left(\mathbb{1}_{[-N,N]^n \cap \Omega} |f| \right)}_{\text{Fortsetzung von } f \text{ als } 0} (x_1, \ldots, x_n) \, d(x_1, \ldots, x_n) < \infty.$$

2) Für integrierbares f sei

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n) \, d\underline{x} := \lim_{N \to \infty} \int_{[-N,N]^n} \left(\mathbb{1}_{[-N,N]^n \cap \Omega} f \right) (\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

<u>Bsp</u> 1) $\sin(x)$ auf $\mathbb{R}$ nicht integrierbar.

2) $\frac{1}{x^2}$ auf $[1, \infty)$ integrierbar. $\leadsto \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$.

Analogon der Substitutionsformel:

Thm (Transformationsformel) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, Ω'

$\varphi : \Omega' \to \Omega$ bijektiv, differenzierbar, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $\det(D\varphi)(f\circ\varphi)$ auf Ω' integrierbar und

$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Omega'} |\det(D\varphi)|\, f(\varphi(x_1, \dots, x_n))\, d\underline{x}.$$

~~Grenzfall~~: Bemerkung Der Faktor $|\det(D\varphi)|(x_1, \dots, x_n)$ gibt die Stauchung/Streckung ~~der Volumen~~ an, die das Volumen bei $(x_1, \dots, x_n)$ durch φ erfährt.